

学校编码: 10384

分类号_____ 密级_____

学号: 19020090153607

UDC_____

廈門大學

博 士 学 位 论 文

Stokes/Darcy耦合问题的算法设计和
数值分析

Design and Analysis of Numerical Methods
for the Coupling of Stokes/Darcy
Equations

王 伟 伟

指导教师姓名: 许 传 炬 教授

专 业 名 称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2012 年 5 月

论文答辩日期: 2012 年 6 月

学位授予日期: 2012 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2012 年 5 月

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、保密 ()，在 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密 ()

作者签名: _____ 日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

导师签名: _____ 日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

厦门大学博硕士论文摘要库

中文摘要

Stokes/Darcy耦合问题由自由流体区域的Stokes方程、多孔介质区域的Darcy定律和某些合适的交界面条件构成。近年来,该耦合问题受到越来越多的关注。一方面是因为它在水力学、环境科学、生物流体力学等诸多领域有着广泛的应用;另一方面,该问题在数学理论和数值分析方面也很具有挑战性。例如,两区域内方程特征的差异以及交界面上耦合条件的处理等都给算法设计和数值分析带来困难。

本文从理论和数值计算两方面对Stokes/Darcy耦合方程及其相关问题进行深入研究,主要内容包括以下四部分。

第一部分,研究了Stokes/Darcy耦合问题的谱方法逼近。主要贡献包括:1) 引进了解决这类问题的新的弱形式,在这一框架下,除了考虑经典的Beavers-Joseph-Saffman条件外,还采用了另一可替代的交面条件。通过把这两类交面条件所产生的弱形式统一成鞍点问题,我们得以应用经典的鞍点理论证明了问题的适定性。2) 构造了数值求解耦合鞍点问题的一个新的谱方法,证明了逼近空间满足inf-sup条件,估计了inf-sup常数,并借此推导了速度和压力的逼近误差。3) 提出了求解谱逼近产生的代数系统的有效方法,通过一系列算例验证了理论结果的正确性,并数值考察了代数系统的性质。4) 作为上述结果的拓展,研究了当交面不是直线(2D情形)或平面(3D情形)的情况下,用Beavers-Joseph交面条件代替Beavers-Joseph-Saffman条件的可行性,在原有框架下进行了理论分析,得出了新耦合问题弱解的存在唯一性。

第二部分,研究了用Legendre-Galerkin谱方法逼近Stokes/Darcy耦合方程的后验误差估计。主要贡献包括:1) 首次用谱方法对Stokes/Darcy耦合问题的后验误差估计进行了深入分析,利用残值法和加权的逆不等式理论,给出了后验误差估计的上界和下界。2) 充分考虑方程本身的性质,把Darcy部分的速度和压力一起考虑,技巧性地解决了Darcy部分后验误差估计子的下界问题。

第三部分,研究了用有限元法求解可兼容交面条件下的Stokes/Darcy耦合方程的后验误差估计。在多孔介质区域用Raviart-Thomas空间而在自由流体区域选取Bernardi-Raugel空间对解空间进行逼近。利用残值法,我们得到了Stokes/Darcy耦合方程的最优的后验误差估计。

第四部分,研究了用有限元法求解Beavers-Joseph-Saffman条件下的Stokes/Darcy耦合方程的后验误差估计。基于第一部分提出的弱形式并选取合适的有限元逼近空间,我们得到了最优的后验误差估计子。

关键词: Stokes/Darcy耦合方程; Beavers-Joseph-Saffman条件; 谱方法; 有限元法;
Uzawa算法; 后验误差估计

厦门大学博硕士论文摘要库

Abstract

The model of the Stokes and Darcy coupled equations is a combination of the Stokes equations in the fluid region and Darcy's law in the porous media region, coupled with the appropriate interface conditions. This model has become a very active research area during the last decade. The extensive investigation of this model has been motivated by a variety of applications, including hydrology, environment science and biofluid dynamics. Also it is challenging in both the mathematical and the numerical aspects. For example, different nature of the Stokes equations and Darcy equations in separated domains, and the treatment of the interface conditions brings difficulty to the design and analysis of numerical methods.

In this dissertation, we are interested in the theoretical investigation and numerical computation of the Stokes/Darcy coupled equations, subject to different interfacial conditions. The main contribution of this work is fourfold:

In the first part, we consider the numerical solution of the coupling of the Stokes and Darcy equations. Our main results include: 1) We introduce a new formulation for the coupled problem, subject to the Beavers-Joseph-Saffman and an alternative matching interface condition. We prove the well-posedness of the weak problems associated to these equations by using classical saddle-point theory. 2) A spectral method for the numerical solution of these weak problems is proposed and analyzed, together with some error estimates. It is found that the new formulations significantly simplify the error analysis and numerical implementation. 3) A number of numerical examples are provided to confirm the efficiency of our method, and investigate the properties of the resulting linear systems. 4) As an extension of the first part, we consider the possibility to use the Beaves-Joseph condition instead of the Beavers-Joseph-Saffman condtion when the geometry of the interface is not a straight line (2D domain) or plan (3D domain), and prove the well-posedness of the associated weak formulations.

In the second part, we consider a posteriori error estimation for the Legendre-Galerkin spectral approximation to the Stokes/Darcy coupled problem with Beavers-Joseph-Saffman interface condition. Our main results include: 1) We make use of the weighted polynomial inverse inequality to firstly derive a family of posteriori error indi-

cators for the spectral method of Stokes/Darcy equations. 2) Considering the nature of the Darcy equations, we use a technique to solve the difficulty encountered in deriving the lower bound of the a posteriori error estimation.

In the third part, we consider a posteriori error estimation of finite element methods for the Stokes/Darcy coupled problem. Instead of Beavers-Joseph-Saffman condition, we use an alternative interface condition to establish the weak formulation and derive an optimal posteriori error estimation. In the Darcy part, we use the local Bernardi-Raugel space, but Raviart-Thomas space in the Stokes part.

In the fourth part, we consider the weak formulation which is proposed by the first part and derive a residual-based posteriori error estimation for the finite element approximation to the Stokes/Darcy coupled problem under Beavers-Joseph-Saffman condition. We obtain an optimal posteriori error estimator by selecting appropriate finite element spaces.

Key words: Stokes/Darcy coupled equations; Beavers-Joseph-Saffman condition; Spectral methods; Finite element methods; Uzawa algorithm; A posteriori error estimation

目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
中文目录	V
英文目录	VII
第 一 章 绪 论	1
1.1 研究现状	1
1.2 数值方法	3
1.3 研究动机与主要结果	4
第 二 章 预备知识	7
2.1 基本结论	7
2.2 Stoke/Dacy耦合模型	11
第 三 章 Stokes/Darcy耦合问题的弱形式及谱逼近	15
3.1 适定性分析	15
3.2 弱问题的谱方法	22
3.3 数值实现和算例	28
3.4 结论	35
第 四 章 Stokes/Darcy耦合方程谱逼近的后验误差估计	39
4.1 弱形式和谱逼近	39
4.2 后验误差估计的上界	40
4.3 后验误差估计的下界	45
第 五 章 基于残值法的Stokes/Darcy耦合问题的后验误差估计	51
5.1 $H(\text{div})$ 型的弱形式	51
5.2 混合有限元法	54
5.3 后验误差估计	55

第 六 章 Stokes/Darcy耦合方程的有限元逼近的后验误差估计	69
6.1 L^2 型的弱形式	69
6.2 有限元离散	72
6.3 L^2 弱形式下的后验误差估计	72
总结与展望	87
参考文献	89
在学期间发表的学术论文与研究成果	95
致谢	97

Contents

Chinese Abstract	I
English Abstract	III
Chinese Contents	V
English Contents	VII
1 Preface	1
1.1 Background	1
1.2 Numerical Methods	3
1.3 Motivation and Main Work	4
2 Preliminaries	7
2.1 Fundamental Results	7
2.2 Modeling	11
3 Spectral Methods Based on New Formulations for Coupled Stokes and Darcy Equations	15
3.1 Well-Posedness	15
3.2 Spectral Methods for Weak Problems	22
3.3 Implementation and Numerical Tests	28
3.4 Concluding Remarks	35
4 A Posteriori Error Estimation of Spectral Method for S- tokes/Darcy Coupled Problem	39
4.1 Weak Formulation and Spectral Approximation	39
4.2 Upper Bound of a Posteriori Error Estimation	40
4.3 Lower Bound of a Posteriori Error Estimation	45

5 A Residual-Based Posteriori Error Estimation for the Coupling of Stokes/Darcy Equations	51
5.1 $H(\text{div})$ Type Weak Formulation	51
5.2 Mixed Finite Element Method	54
5.3 A Posteriori Error Estimation	55
6 A Posteriori Error Estimation of Finite Element Methods for Stokes/Darcy Coupled Equations	69
6.1 L^2 Type Weak Formulation	69
6.2 Finite Element Discretization	72
6.3 A posteriori Error Estimation Based on L^2 Weak Formulation	72
Concluding Remarks	87
References	89
Major Academic Achievements	95
Acknowledgements	97

第一章 绪论

1.1 研究现状

1.1.1 Stokes/Darcy方程的研究现状

自由流和渗流共存的系统在自然界和工业领域中都比较常见。宏观尺度下对其模拟是通过自由流动区域的Stokes方程和多孔介质区域的Darcy方程来实现的。研究此类问题具有十分重要的实际意义,它广泛存在于人们生产和生活的各个方面,大到海水入侵、油藏开采、地下水污染的修复,小到棉纺织材料的储存、纸张中油墨的分布等等。

对Stokes/Darcy问题的研究可以追溯到上世纪90年代Gartling等人^[1,2]的工作,他们当时采用的是Beavers-Joseph交面条件。Beavers-Joseph条件是Beavers和Joseph^[3]通过实验得出的描述自由流体在多孔介质界面附近切向流速的规律。后来Jones^[4]将Beavers-Joseph条件推广到多维情形,Saffman^[5]通过理论推导得出了简化的Beavers-Joseph-Saffman条件^[6]。

利用Beavers-Joseph-Saffman条件,Discacciati^[7]和Layton^[8]分别从两个不同的角度论证了耦合问题弱解的存在唯一性,同时也都提出了各自的数值算法。基于上述两篇文献所提出的弱形式,关于此耦合问题的数值求解方法的研究工作大量涌现。提及该问题的数值方法,纵观已有文献,使用最多的是有限元法^[8-20]。Burman等人^[10]把Crouzeik-Raviart(CR)元应用到Stokes/Darcy的有限元逼近上,为了克服在多孔介质区域上由CR元引起的不收敛性,他们在变分形式中加入了一个稳定项。Rui等人^[21]针对Stokes/Darcy耦合问题提出了一种稳定化混合元方法,他们在整个Stokes和Darcy区域对流场压力和速度采用分片常数和C-R有限元,并使用一个罚项来加罚速度在单元边界的跳量。Bernardi等人^[11]把旋度作为一个新的未知量引入到Stokes/Darcy耦合方程中,给出了一个新的变分形式。Mardal等人^[17]在Stokes/Darcy方程中加入一个扰动参数,并在此基础上提出了新的非协调有限元逼近空间。Mu等人^[18]用二网格法对Stokes/Darcy问题进行了数值求解。Xie等人^[20]通过引进一个不连续的系数把Stokes方程和Darcy方程写成统一的Brinkman方程的形式,并用有限元法进行了数值求解。Layton等人^[8]在交面上引入了一个拉格朗日乘子,并提到Taylor-Hood元^[22]或MINI元^[23]都可以被运用到弱形式的数值求解中。

Karper等人^[24]提出了两种弱形式并给出了相应的协调有限元离散格式:第一种弱

形式源于文献[17]的思想, 第二种弱形式从整体计算区域出发, 构造了合适的解空间, 在弱问题中引进了散度算子和旋度算子, 分析了弱问题的适定性, 并选取MINI元逼近解空间。

当交面不是直线(2D情形)或平面(3D情形)的情况下, Cao等人^[12]用Beavers-Joseph交面条件来代替Beavers-Joseph-Saffman条件, 此时的难点在于弱问题解的存在唯一性的证明, 但他们通过对相关参数进行合理的约定, 得出了弱问题的适定性, 同时用有限元进行了数值模拟。

当然, 还有一些文献是用其它的数值方法来进行数值求解的, 比如, Das等人^[25]用有限体积法, Grault和Rivière^[26]用DG方法对该耦合问题进行了分析研究。本文中我们首次用谱方法对该问题进行了数值分析和求解。

1.1.2 后验误差估计的研究现状

自适应有限元方法在工程计算中有着广泛的应用, 如电子工程、计算流体力学、计算空气动力学等。自适应算法具有较高的识别能力和选择最优参数的能力, 能够以尽量少的计算量达到所要求的精度。它主要利用中间计算结果自动计算所需要的网格, 选取最佳的离散方式, 从而逐步达到所需精度。自适应算法的网格划分大致可分为h型、p型和hp型三类。后验误差估计子作为自适应算法的核心, 也可以分为h型、p型和hp型三类。h型后验误差估计子可通过两种途径获得: 基于变分方程的残值法和基于有限元解的后处理法。1978年Babuska和Rheinboldt^[27]首次对二阶微分方程的线性有限元后验误差进行了研究, 得到了计算有限元后验误差的有效方法(残值法)。后来研究者把这种方法应用到其它微分方程的有限元后验误差估计中, 同样取得了大量成果^[28-30]。尽管这种方法出现的时间较早, 数学理论比较完善, 但由于其形式较为复杂, 所以, 并没有在工程计算中得到广泛的应用。1987年, Zienkiewicz和Zhu^[31]提出了一种与残值法有着本质区别的基于后处理技术的后验误差估计方法。由于其具有易于理解、计算简单、与现有的有限元应用软件接口方便等特点, 所以受到了工程界的广泛关注。随后Zienkiewicz和Zhu^[32]开始研究超收敛特性对该方法的改进。

有关p型和hp型后验误差估计方法的详细介绍可参考文献[33,34]。Melenk和Wohlmuth^[35]给出了标准椭圆形方程的hp型有限元的后验误差估计。此后, Gong^[36]和Chen^[37]等人给出了标准椭圆形方程最优控制问题的后验误差估计, 但遗憾的是两者都没有给出后验误差估计子下界的最优估计。Guo^[38]对p和hp型有限元的后验误差估计研究情况进行了综述, 并且在Jacobi权空间的框架下给出了椭圆型方程的后验误差估计。

根据上述文献中的一些结果, 我们知道一个好的后验误差估计能够使得自适应算

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库